Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2023-2024 учебном году
10 класс
Заключительный этап. Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). Небольшие шарики массой m_1 и m_2 подвешены на нитях одинаковой длины таким образом, что в состоянии покоя они соприкасаются друг с другом ($m_1 << m_2$). Шарики разводят в разные стороны так, что их нити составляют одинаковый угол α с вертикалью. Затем их одновременно отпускают и после соприкосновения они испытывают упругое соударение. До и после удара шары движутся в одной и той же плоскости. Определить на какой максимальный угол α_1 отклонится шар m_1 после удара ($\alpha, \alpha_1 << 1$).

Решение:

Так как исходно шарики отклонены на малые углы от вертикали и их нити имеют одинаковую длину, то они представляют собой математические маятники с одинаковым периодом. Следовательно, их столкновение произойдет в момент, когда нити шариков ориентированы вертикально. Скорости шариков в момент удара имеют одинаковую величину и направлены навстречу друг к другу. В силу соотношения $m_1 << m_2$ столкновение первого шарика со вторым происходит аналогично тому, как если бы первый шарик столкнулся с массивной стенкой. После упругого столкновения с массивной стенкой шарик отскакивает от нее с той же скоростью, с которой он со стенкой сближался.

Определим скорость первого шарика перед столкновением. В силу закона сохранения энергии потенциальная энергия шарика в исходном положении равна кинетической энергии перед столкновением:

$$m_1 \cdot \frac{V^2}{2} = m_1 g l \cdot (1 - \cos\alpha), \tag{1.1}$$

где g – ускорение свободного падения, l – длина маятника. В силу условия $\alpha << 1$ можно записать

$$\cos\alpha \approx 1 - \cos\alpha \approx 1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right). \tag{1.2}$$

Подставив это соотношение в уравнение (1.1) и проведя простые преобразования, получим

$$V \approx \alpha \cdot \sqrt{gl}. \tag{1.3}$$

Второй шарик перед столкновением будет иметь такую же по величине скорость.

Первый шарик перед столкновением сближается со вторым со скоростью равной $2V$. Следовательно, после столкновения относительно второго шарика он будет иметь такую же по величине скорость, какую он имел до столкновения, но противоположного направления. Так как второй шарик сам двигался со скоростью V, то первый шарик относительно неподвижной системы отсчета будет двигаться со скоростью $V_1 \approx 3V$.

Связь между искомым углом α_1 и скоростью V_1 описывается уравнением, аналогичным уравнению (1.3):

$$V_1 \approx \alpha_1 \cdot \sqrt{gl} \tag{1.4}$$

Выражая α_1 с помощью уравнения (1.4), подставляя $V_1 \approx 3V$ и используя уравнение (1.3), получим, что

$$\alpha_1 \approx 3\alpha \tag{1.5}$$

Ответ: $\alpha_1 \approx 3\alpha$.

Задача 2. (20 баллов). Световод выполнен из тонкого прозрачного волокна с показателем преломления n = 1,20. Под каким максимальным углом к оси световода должен падать световой луч на торец, чтобы при прохождении через световод испытать минимальное ослабление? Чему будет равен диаметр светового кольца на экране, который расположен на расстоянии 50 см от конца световода, если угол падения равен углу, под которым свет выходит из световода? Диаметр световода мал.

Решение:

Начертим два рисунка для понимания задачи.

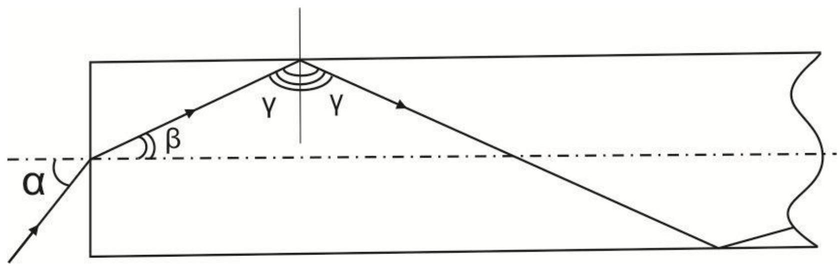


Рис. 2.1. Углы падения и отражения луча в световоде

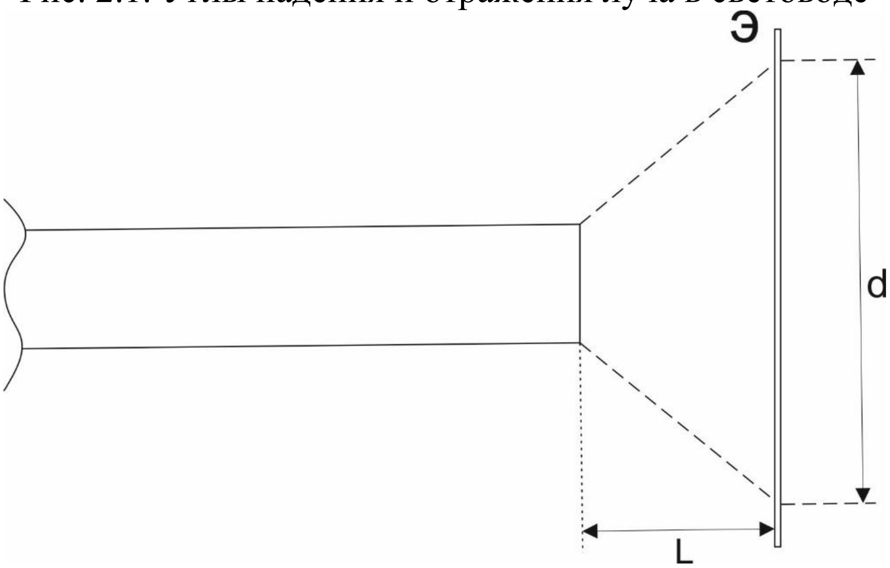


Рис. 2.2. Изображение световода и светового кольца на экране.

Для начала ответим на первый вопрос задачи. Пусть γ - предельный угол полного внутреннего отражения, тогда

$$\sin\gamma_{\text{пр}} = \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

Из закона геометрической оптики

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n. \tag{2.2}$$

Из соотношения сторон прямоугольного треугольника следует, что

$$\sin\beta = \cos\gamma, \tag{2.3}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\gamma} = n, \tag{2.4}$$

$$\sin\gamma = \frac{1}{n}, \tag{2.5}$$

$$\sin\alpha = n\cos\gamma = n(1-\sin^2\gamma)^{1/2}. \tag{2.6}$$

Отсюда находим α:

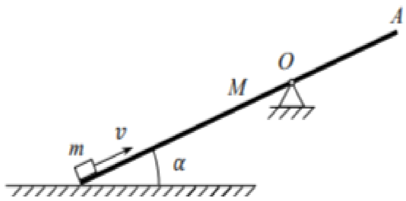
$$\alpha = \arcsin(n^2-1)^{1/2}. \tag{2.7}$$

Теперь найдем диаметр светового кольца:

$$d = 2l\tan\alpha. \tag{2.8}$$

Ответ: $\alpha = 41^\circ, d = 0{,}87$ см.

Задача 3. (20 баллов). На рисунке изображены качели-балансир, они состоят из доски длиной L и массой M. Качели собраны так, что ось вращения находится на расстоянии равном L/n от нижнего края доски. Вверх по доске с некоторой начальной скоростью начинает скользить брусок массой m. Угол между землей и доской равен α, коэффициент трения между бруском и доской равен k. Найдите минимальную начальную скорость бруска, чтобы при его подъеме качели повернулись.



Решение:

Начертим рисунок для решения задачи.

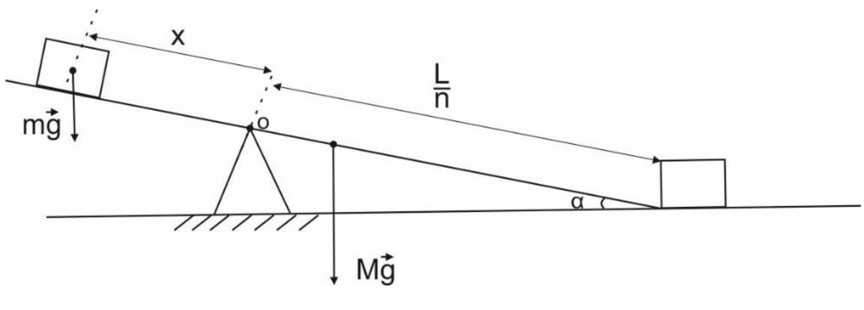


Рис. 3.1. Распределение сил для бруска.

Распределив силы, приступим к преобразованиям:

$$mg \cdot x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Mg\left(\frac{L}{n} - \frac{L}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \qquad (3.1)$$

$$x = \frac{M}{m} \cdot L \cdot \left(\frac{L}{n} - \frac{L}{2}\right), \qquad (3.2)$$

$$-F_{\text{тр}} \cdot \left(\frac{L}{n} + x\right) = mg \cdot h - \frac{mV_0^2}{2}, \qquad (3.3)$$

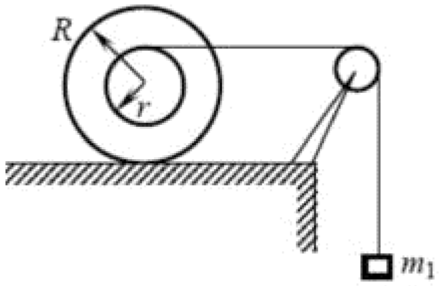
$$-kmg \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{L}{n} + x\right) = mg \cdot \left(\frac{L}{n} + x\right) \cdot \sin\alpha - \frac{mV_0^2}{2}, \qquad (3.4)$$

Преобразовав равенства, узнаем минимальную начальную скорость бруска V_0:

$$V_0 = \sqrt{2gL \cdot (k\cos\alpha + \sin\alpha) \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\right)} \qquad (3.5)$$

Ответ: $V_0 = \sqrt{2gL \cdot (k\cos\alpha + \sin\alpha) \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\right)}$.

Задача 4. (20 баллов). На горизонтальном столе лежит катушка, имеющая внешний радиус R, с намотанной на нее нерастяжимой нитью, причем радиус намотки $r < R$. Нить перекинута через невесомый блок и к концу ее подвешен груз, который движется вниз с некоторым неизвестным постоянным ускорением, которое обозначим a_1. Катушка начинает катиться без проскальзывания, нить катушки параллельна столу, при этом центр масс катушки перемещается с постоянным ускорением a, которое так же неизвестно. Найти отношение a_1/a. Принять начальную скорость катушки равной нулю.



Решение:

За один оборот катушка проходит вдоль стола расстояние $S = 2\pi R$, то есть ее центр (центр масс) перемещается на расстояние $S = 2\pi R$. На такое же расстояние должен был опуститься и груз, так как нить нерастяжима. Но при движении катушки вправо (см. рис. в условии задачи) происходит еще разматывание нити и при одном обороте катушки она размотается еще на величину $2\pi r$, что приведет к дополнительному опусканию груза на эту же величину. Таким образом, при перемещении катушки на расстояние $S = 2\pi R$ груз опустится на расстояние $S_1 = 2\pi R + 2\pi r$. При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью расстояние

$$S = \frac{at^2}{2}, \tag{4.1}$$

$$S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}. \tag{4.2}$$

Откуда получаем

$$\frac{a_1}{a} = \frac{S_1}{S} = 1 + \frac{r}{R}. \tag{4.3}$$

Ответ: $\frac{a_1}{a} = 1 + \frac{r}{R}$.

Задача 5. (20 баллов). Представим, что в отдаленном будущем земляне решили создать в поясе Оорта планетоидный объект из некой гипотетической, незамерзающей при $T = 0° K$ жидкости, обладающей металлической проводимостью. При имеющейся у них технологии они, с частотой 1 раз в секунду, проводят слияние заряжённых капель этой жидкости. Каждая следующая капля имеет противоположный заряд по сравнению с предыдущей. Заряд первой положительно заряженной капли $q_1^{(+)}$, а отрицательной $q_1^{(-)}$, радиусы этих капель r_1. Каждая следующая положительно заряженная капля имеет заряд по сравнению с предыдущей положительной каплей в n раз меньше, а каждая отрицательно заряженная по сравнению с предыдущей отрицательно заряженной в m раз меньше. Радиус любой следующей положительно или отрицательно заряженной капель в k раз меньше, чем предыдущей. Каким будет потенциал планетоида через 1 час после начала проведения процесса?

Решение:

Заметим, что внутри этой задачи находятся геометрические прогрессии, а указание времени 1 час и 10 часов является просто ловушкой.

Для потенциала можно записать:

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(+)} + \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(-)}}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{5.1}$$

Далее найдем суммарный положительный и суммарный отрицательный заряд, как суммы соответствующих геометрических прогрессий

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(+)} = q_1^{(+)} + \frac{q_1^{(+)}}{n} + \frac{q_1^{(+)}}{n^2} + \frac{q_1^{(+)}}{n^3} + \cdots = \frac{q_1^{(+)}}{1 - \frac{1}{n}}, \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(-)} = q_1^{(-)} + \frac{q_1^{(-)}}{m} + \frac{q_1^{(-)}}{m^2} + \frac{q_1^{(-)}}{m^3} + \cdots = \frac{q_1^{(-)}}{1 - \frac{1}{m}}. \tag{5.3}$$

Знак потенциала будет определяться тем, какой из зарядов $q_1^{(+)}$ или $q_1^{(-)}$ по величине больше.

Затем надо вычислить радиус, получившегося после слияния капель планетоида. Этот радиус найдем из суммарного объема слившихся капель. Учитывая, что размеры положительных и отрицательных капель изменяются одинаковым образом, то можно записать:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\{V^{(+)} + V^{(-)}\}}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V^{(\pm)}}{2\pi}}, \tag{5.4}$$

$$V^{(\pm)} = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \left\{\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^6} + \frac{1}{k^9} + \cdots\right\} = \frac{4}{3}\pi \left\{\frac{r_1}{k}\right\}^3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}, \tag{5.5}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V^{(\pm)}}{2\pi}} = \frac{r_1}{k}\sqrt[3]{\frac{2}{1 - \frac{1}{n}}} \tag{5.6}$$

Подставим (5.2), (5.3) и (5.6) в (5.1) и получим:

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(+)} + \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(-)}}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\dfrac{q_1^{(+)}}{1 - \frac{1}{n}} + \dfrac{q_1^{(-)}}{1 - \frac{1}{m}}}{4\pi\varepsilon_0 \dfrac{r_1}{k}\sqrt[3]{\dfrac{2}{1 - \frac{1}{n}}}}$$

Ответ: $\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(+)} + \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(-)}}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\frac{q_1^{(+)}}{1 - \frac{1}{n}} + \frac{q_1^{(-)}}{1 - \frac{1}{m}}}{4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1}{k}\sqrt[3]{\frac{2}{1 - \frac{1}{n}}}}$

РЕШЕНИЕ
жюри Межрегиональной олимпиады школьников
на базе ведомственных образовательных организаций по физике
в 2023-2024 учебном году

Каждая задача очного этапа олимпиады оценивалась по системе: указанной в таблицах. Для каждой параллели классов (8-9, 10 и 11) разработана своя система баллов и критерии определения призёров (1, 2 и 3 место), принятая на заседании жюри олимпиады.

Критерии определения призёров (по сумме набранных баллов):
10 класс
за I место – от 95 до 100 баллов;
за II место – от 70 до 94 баллов;
за III место – от 55 до 69 баллов.

Система оценки задач
для 10 и 11 классов (максимальное количество баллов - 100):

№ задачи	1	2	3	4	5
Ответ верный, решение является верным и полным;	20	20	20	20	20
Ответ верный, решение является верным, получен правильный ответ, возможны небольшие недочеты (не полный в рисунок, не написаны законы в векторной форме и т.д.)	17-19	17-19	17-19	17-19	17-19
Ответ верный, решение в общем верное, получен правильный ответ, но есть существенные недочеты (отсутствие рисунка, использование соотношений, не являющихся физическими законами, не учтены и не рассмотрены все возможные случаи, использованные соотношения и формулы недостаточно обоснованы и т.д.)	11-16	11-16	11-16	11-16	11-16
Ответ неверный, но составлена правильная система уравнений и соотношений с использованием необходимых физических законов, но решение не доведено до конца или в нем имеются ошибки на стадии математических преобразований	2-10	2-10	2-10	2-10	2-10
Ответ неверный, обнаружены существенные пробелы в теоретических знаниях, законах физики, которые не позволили решить задачу	0-1	0-1	0-1	0-1	0-1